Jak na separované proměnné

Základní úloha: řešíme rovnici $y' = g(y) \cdot f(x)$ pro f a g spojité.

Při hledání řešení postupujeme v následujících šesti krocích:

1. definiční obor funkce f $\to$ maximální intervaly $I_1, I_2, \dots$
2. definiční obor a nulové body funkce g $\to$ max. intervaly $J_1, J_2 \dots$
3. stacionární řešení (nulové body g)
4. zvolíme každé $I = I_k$ a $J = J_l$ najdeme
   - F primitivní k f na I
   - G primitivní k $\frac{1}{g}$ na J
5. pro $C \in \mathbb{R}$ najdeme maximální intervaly v množině $\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\}$ $\to$ řešení $G^{-1}(F(x) + C)$
6. lepení

Existence a jednoznačnost řešení

Základní úloha: řešíme rovnici $y' = g(y) \cdot f(x)$ pro f a g spojité.

- větvení (nejednoznačnost) může nastat pouze v bodě, na jehož okolí není fg' spojitá,
- (lepení) nechť y_1 je řešením na (a, b) a y_2 je řešením na (b, c), pokud $\lim_{x \to b-} y_1(x) = L = \lim_{x \to b+} y_2(x)$, potom funkce $y : (a, c) \to \mathbb{R}$ definovaná jako

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b), \\ L, & x = b, \\ y_2(x), & x \in (b, c) \end{cases}$$

je řešením na (a, c).

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Máme $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ a $g(y) = 1$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Máme $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ a $g(y) = 1$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ maximální intervaly

$$I_1 = (-\infty, -1), \quad I_2 = (-1, 0). \quad I_3 = (0, \infty)$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Máme $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ a $g(y) = 1$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ maximální intervaly

$$I_1 = (-\infty, -1), \quad I_2 = (-1, 0). \quad I_3 = (0, \infty)$$

2. nulové body funkce g nejsou, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,

$$J_1 = \mathbb{R}$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Máme $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ a $g(y) = 1$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ maximální intervaly

$$I_1 = (-\infty, -1), \quad I_2 = (-1, 0). \quad I_3 = (0, \infty)$$

2. nulové body funkce g nejsou, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,

$$J_1 = \mathbb{R}$$

3. stacionární řešení nejsou

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Máme $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ a $g(y) = 1$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ maximální intervaly

$$I_1 = (-\infty, -1), \quad I_2 = (-1, 0). \quad I_3 = (0, \infty)$$

2. nulové body funkce g nejsou, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,

$$J_1 = \mathbb{R}$$

3. stacionární řešení nejsou
4.

$$F(x) = \begin{cases} \log \frac{x}{x+1} & I = I_1, I_3 \\ \log \frac{-x}{x+1} & I = I_2 \end{cases}, \qquad G(y) = y, \quad J = J_1$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Máme $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ a $g(y) = 1$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ maximální intervaly
$$I_1 = (-\infty, -1), \quad I_2 = (-1, 0). \quad I_3 = (0, \infty)$$
2. nulové body funkce g nejsou, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,
$$J_1 = \mathbb{R}$$
3. stacionární řešení nejsou
4. $$F(x) = \begin{cases} \log \frac{x}{x+1} & I = I_1, I_3 \\ \log \frac{-x}{x+1} & I = I_2 \end{cases}, \qquad G(y) = y, \quad J = J_1$$
5. $\{x \in I_k : F(x) + C \in G(J)\} = I_k$, $k = 1, 2, 3$, $G^{-1}(y) = y$ a tedy
$$y(x) = \begin{cases} \log \frac{x}{x+1} + C & x \in I_1, I_3, \\ \log \frac{-x}{x+1} + C & x \in I_2. \end{cases}$$

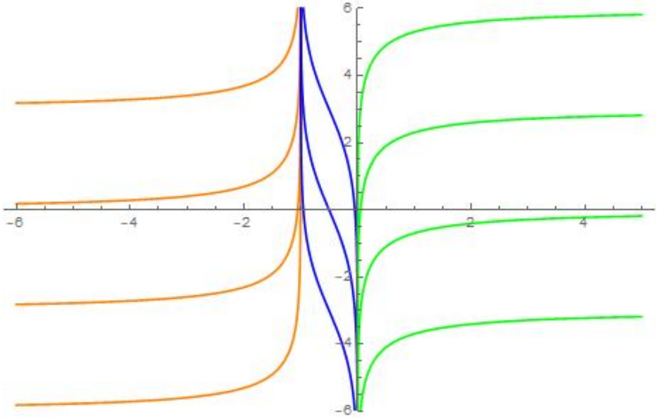
Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

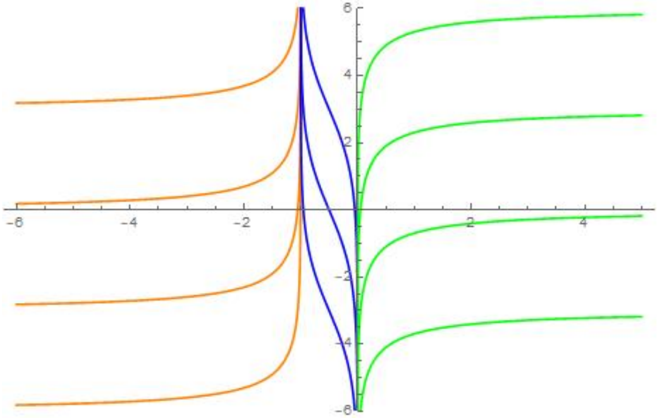
Máme $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ a $g(y) = 1$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ maximální intervaly
$$I_1 = (-\infty, -1), \quad I_2 = (-1, 0). \quad I_3 = (0, \infty)$$
2. nulové body funkce g nejsou, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,
$$J_1 = \mathbb{R}$$
3. stacionární řešení nejsou
4. $$F(x) = \begin{cases} \log \frac{x}{x+1} & I = I_1, I_3 \\ \log \frac{-x}{x+1} & I = I_2 \end{cases}, \qquad G(y) = y, \quad J = J_1$$
5. $\{x \in I_k : F(x) + C \in G(J)\} = I_k,\ k = 1, 2, 3,\ G^{-1}(y) = y$ a tedy
$$y(x) = \begin{cases} \log \frac{x}{x+1} + C & x \in I_1, I_3, \\ \log \frac{-x}{x+1} + C & x \in I_2. \end{cases}$$

Jak na separované proměnné - příklady



Jak na separované proměnné - příklady



Máme všechna řešení? Máme $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ a $g(y) = 1$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.
Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = y(y+1)$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ maximální intervaly

$$I_1 = \mathbb{R}$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.
Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = y(y+1)$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ maximální intervaly

$$I_1 = \mathbb{R}$$

2. nulové body funkce g jsou -1 a 0, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,

$$J_1 = (-\infty, -1), \quad J_2 = (-1, 0). \quad J_3 = (0, \infty)$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.
Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = y(y+1)$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ maximální intervaly

$$I_1 = \mathbb{R}$$

2. nulové body funkce g jsou -1 a 0, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,

$$J_1 = (-\infty, -1), \quad J_2 = (-1, 0). \quad J_3 = (0, \infty)$$

3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 0$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.
Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = y(y+1)$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ maximální intervaly

$$I_1 = \mathbb{R}$$

2. nulové body funkce g jsou -1 a 0, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$,

$$J_1 = (-\infty, -1), \quad J_2 = (-1, 0). \quad J_3 = (0, \infty)$$

3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 0$
4.

$$F(x) = x, \quad I = I_1 \qquad G(y) = \begin{cases} \log \frac{y}{y+1} & J = J_1, J_3, \\ \log \frac{-y}{y+1} & J = J_2. \end{cases}$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$
2. $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$. $J_3 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 0$
4. $$F(x) = x, \quad I = I_1 \qquad G(y) = \begin{cases} \log \frac{y}{y+1} & J = J_1, J_3, \\ \log \frac{-y}{y+1} & J = J_2. \end{cases}$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$
2. $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$. $J_3 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 0$
4. $$F(x) = x, \quad I = I_1 \qquad G(y) = \begin{cases} \log \frac{y}{y+1} & J = J_1, J_3, \\ \log \frac{-y}{y+1} & J = J_2. \end{cases}$$
5. $I = I_1 = \mathbb{R}$, $J = J_1 = (-\infty, -1)$, $F(x) = x$, $G(y) = \log \frac{y}{y+1}$.

$$\lim_{y \to -\infty} G(y) = 0, \qquad \lim_{y \to -1-} G(y) = \infty \implies G(J) = (0, \infty)$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$
2. $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$. $J_3 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 0$
4. $$F(x) = x, \quad I = I_1 \qquad G(y) = \begin{cases} \log \frac{y}{y+1} & J = J_1, J_3, \\ \log \frac{-y}{y+1} & J = J_2. \end{cases}$$
5. $I = I_1 = \mathbb{R}$, $J = J_1 = (-\infty, -1)$, $F(x) = x$, $G(y) = \log \frac{y}{y+1}$.

$$\lim_{y \to -\infty} G(y) = 0, \qquad \lim_{y \to -1-} G(y) = \infty \implies G(J) = (0, \infty)$$

Pro $C \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = \{x \in \mathbb{R} : x + C \in (0, \infty)\} = (-C, \infty).$$

$$G^{-1}(t) = \frac{e^t}{1 - e^t} \text{ dává řešení } y_3(x) = \frac{e^{x+C}}{1 - e^{x+C}}, \ x \in (-C, \infty), \ C \in \mathbb{R}.$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$
2. $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$. $J_3 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 0$
4. $$F(x) = x, \qquad G(y) = \begin{cases} \log \frac{y}{y+1} & I = I_1, I_3 \\ \log \frac{-y}{y+1} & I = I_2 \end{cases}.$$
5. $I = I_1 = \mathbb{R}$, $J = J_2 = (-1, 0)$, $F(x) = x$, $G(y) = \log \frac{-y}{y+1}$.

$$\lim_{y \to -1+} G(y) = \infty, \quad \lim_{y \to 0-} G(y) = -\infty \implies G(J) = (-\infty, \infty)$$

Pro $C \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = \{x \in \mathbb{R} : x + C \in (-\infty, \infty)\} = (-\infty, \infty).$$

$$G^{-1}(t) = -\frac{e^t}{1 + e^t} \text{ dává řešení } y_4(x) = -\frac{e^{x+C}}{1 + e^{x+C}},\ x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}.$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$
2. $J_1 = (-\infty, -1), \quad J_2 = (-1, 0). \quad J_3 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 0$
4. $$F(x) = x, \qquad G(y) = \begin{cases} \log \frac{y}{y+1} & I = I_1, I_3 \\ \log \frac{-y}{y+1} & I = I_2 \end{cases}.$$
5. $I = I_1 = \mathbb{R}$, $J = J_3 = (0, \infty)$, $F(x) = x$, $G(y) = \log \frac{y}{y+1}$.

$$\lim_{y \to -0+} G(y) = -\infty, \quad \lim_{y \to \infty} G(y) = 0 \implies G(J) = (-\infty, 0)$$

Pro $C \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\{x \in I : F(x)+C \in G(J)\} = \{x \in \mathbb{R} : x+C \in (-\infty, 0)\} = (-\infty, -C).$$

$$G^{-1}(t) = \frac{e^t}{1-e^t} \text{ dává řešení } y_5(x) = \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}}, \; x \in (-\infty, -C), \; C \in \mathbb{R}.$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$
2. $J_1 = (-\infty, -1), \quad J_2 = (-1, 0). \quad J_3 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 0$
4. $$F(x) = x, \qquad G(y) = \begin{cases} \log \frac{y}{y+1} & I = I_1, I_3 \\ \log \frac{-y}{y+1} & I = I_2 \end{cases}.$$
5. $$y_3(x) = \frac{e^{x+C}}{1 - e^{x+C}}, \; x \in (-C, \infty), \; C \in \mathbb{R},$$ $$y_4(x) = -\frac{e^{x+C}}{1 + e^{x+C}}, \; x \in \mathbb{R}, \; C \in \mathbb{R},$$ $$y_5(x) = \frac{e^{x+C}}{1 - e^{x+C}}, \; x \in (-\infty, -C), \; C \in \mathbb{R}.$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

6. Máme řešení:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= -1, \quad y_2(x) = 0\\
y_3(x) &= \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}},\ x \in (-C, \infty),\ C \in \mathbb{R},\\
y_4(x) &= -\frac{e^{x+C}}{1+e^{x+C}},\ x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R},\\
y_5(x) &= \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}},\ x \in (-\infty, -C),\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = y(y+1)$.

6. Máme řešení:

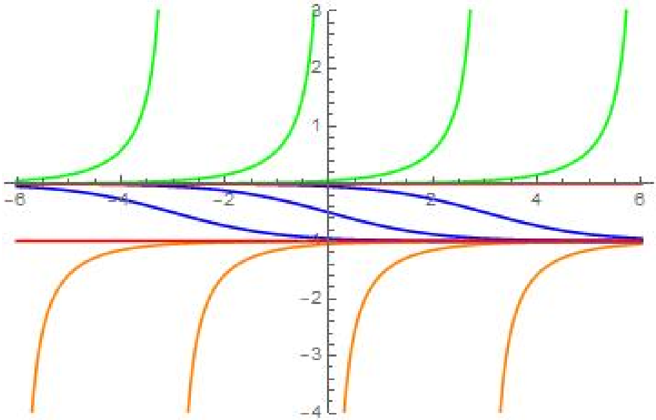
$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= -1, \quad y_2(x) = 0 \\
y_3(x) &= \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}},\ x \in (-C, \infty),\ C \in \mathbb{R}, \\
y_4(x) &= -\frac{e^{x+C}}{1+e^{x+C}},\ x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}, \\
y_5(x) &= \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}},\ x \in (-\infty, -C),\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Jsou to maximální řešení? $\to$ lepení

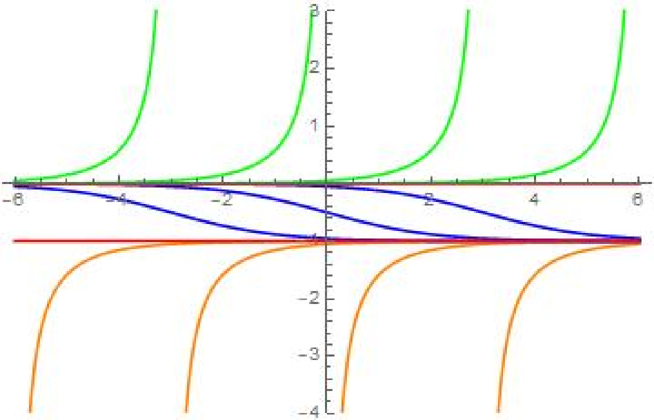
$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -C+} y_3(x) &= \lim_{x \to -C+} \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}} = -\infty \\
\lim_{x \to -C-} y_5(x) &= \lim_{x \to -C-} \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}} = \infty.
\end{aligned}
$$

Lepit nelze.

Jak na separované proměnné - příklady



Jak na separované proměnné - příklady



Máme všechna řešení? Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = y(y+1)$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $I_1 = \mathbb{R}$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \sqrt{1-y^2}$.

Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1-y^2}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = [-1, 1]$, nulové body -1 a 1, $J_1 = (-1, 1)$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = [-1, 1]$, nulové body -1 a 1, $J_1 = (-1, 1)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 1$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \sqrt{1-y^2}$.

Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1-y^2}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = [-1, 1]$, nulové body -1 a 1, $J_1 = (-1, 1)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 1$
4. $F(x) = x, \quad I = I_1; \qquad G(y) = \arcsin y, \quad J = J_1.$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \sqrt{1-y^2}$.

Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1-y^2}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = [-1,1]$, nulové body -1 a 1, $J_1 = (-1,1)$
3. stacionární řešení jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 1$
4. $F(x) = x, \quad I = I_1; \qquad G(y) = \arcsin y, \quad J = J_1.$
5. $I = I_1 = \mathbb{R}$, $J = J_1 = (-1,1)$, $F(x) = x$, $G(y) = \arcsin y$.

$$\lim_{y\to -1+} G(y) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{y\to 1-} G(y) = \frac{\pi}{2} \implies G(J) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Pro $C \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x + C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right).$$

$G^{-1}(t) = \sin t$ a tedy dostáváme řešení

$$y_3(x) = \sin(x + C),\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right),\ C \in \mathbb{R}.$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \sqrt{1-y^2}$.

6. Máme řešení:

$$y_1(x) = -1, \quad y_2(x) = 1$$
$$y_3(x) = \sin(x+C),\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right),\ C \in \mathbb{R}.$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \sqrt{1-y^2}$.

6. Máme řešení:

$$y_1(x) = -1, \quad y_2(x) = 1$$
$$y_3(x) = \sin(x+C),\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right),\ C \in \mathbb{R}.$$

Jsou to maximální řešení?

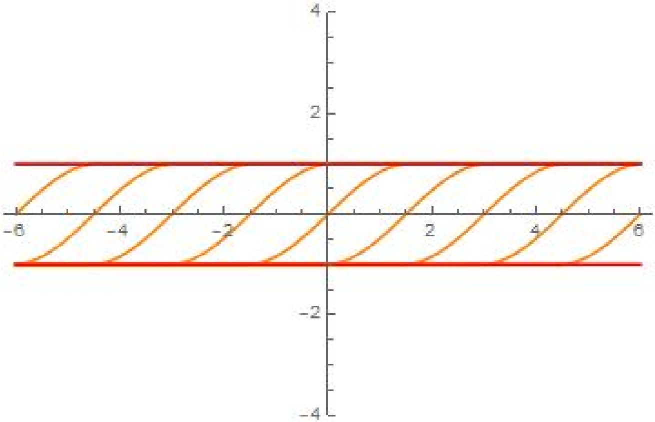
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2} - C+} y_3(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2} - C+} \sin(x+C) = -1$$
$$\lim_{x\to, \frac{\pi}{2} - C-} y_5(x) = \lim_{x\to, \frac{\pi}{2} - C-} \sin(x+C) = 1$$

Takže můžeme (musíme) lepit a pro $C \in \mathbb{R}$ dostaneme maximální řešení

$$\tilde{y}_3(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2} - C\right) \\ \sin(x+C), & x \in \left[-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2} - C, \infty\right) \end{cases}$$

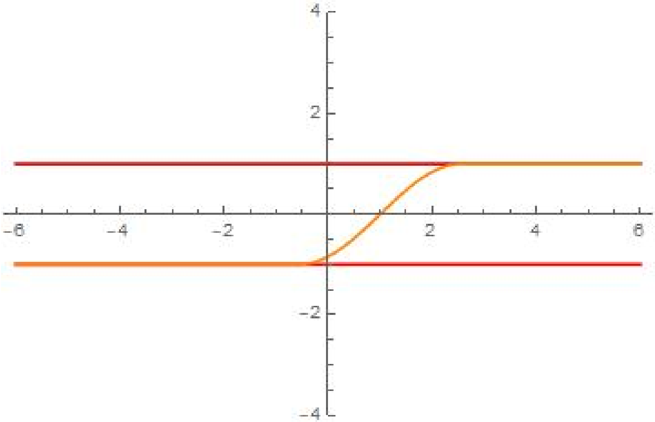
Jak na separované proměnné - příklady

Před lepením:



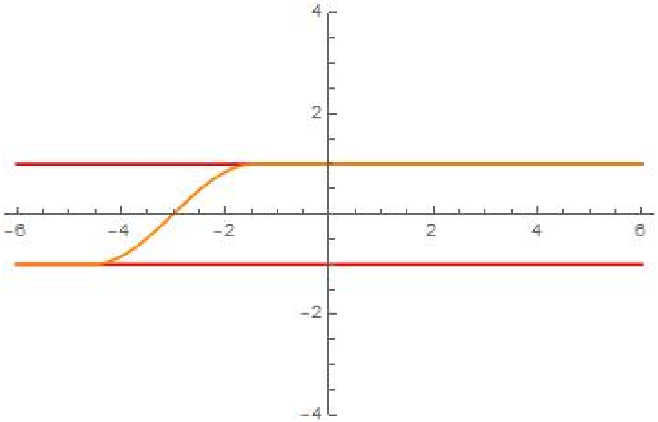
Jak na separované proměnné - příklady

Po lepení:



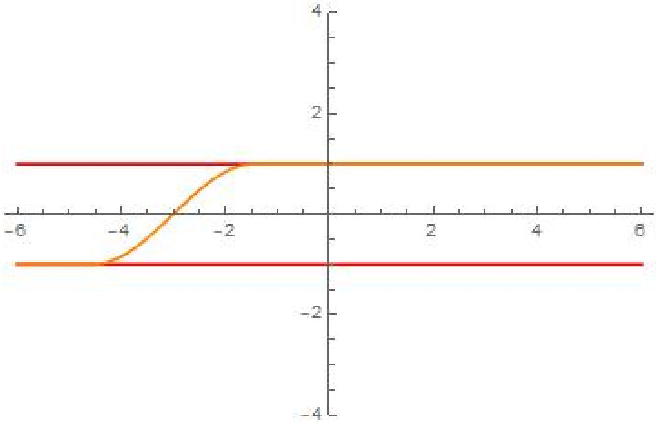
Jak na separované proměnné - příklady

Po lepení:



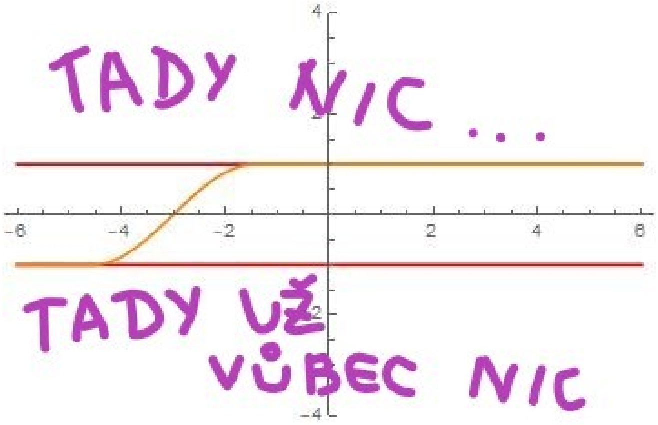
Jak na separované proměnné - příklady

Po lepení:



Máme všechna řešení? Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

Jak na separované proměnné - příklady



Máme všechna řešení? Máme $f(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$. Máme $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ a $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$. Máme $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ a $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a tedy $I_1 = \mathbb{R}$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \frac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$. Máme $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ a $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a tedy $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, nulový bod je 0 a tedy $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$. Máme $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ a $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a tedy $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, nulový bod je 0 a tedy $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení je $y_1 = 0$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$. Máme $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ a $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a tedy $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, nulový bod je 0 a tedy $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení je $y_1 = 0$
4. $F(x) = \log(1+x^2)$, $I = I_1$; $\qquad G(y) = y^{\frac{1}{3}}$, $J = J_1, J_2$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$. Máme $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ a $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a tedy $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, nulový bod je 0 a tedy $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení je $y_1 = 0$
4. $F(x) = \log(1+x^2)$, $I = I_1$; $\quad G(y) = y^{\frac{1}{3}}$, $J = J_1, J_2$.
5. $I = I_1 = \mathbb{R}$, $J = J_1 = (-\infty, 0)$, $G(J) = (-\infty, 0)$,

$$\begin{aligned}
\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} &= \{x \in \mathbb{R} : \log(1+x^2) + C \in (-\infty, 0)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \log(1+x^2) \in (-\infty, -C)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : 1 + x^2 \in (0, e^{-C})\} \\
&= (-\sqrt{e^{-C} - 1}, \sqrt{e^{-C} - 1}), \quad C < 0.
\end{aligned}$$

$G^{-1}(t) = t^3$ a tedy dostáváme řešení

$$y_2(x) = (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (-\sqrt{e^{-C} - 1}, \sqrt{e^{-C} - 1}), \quad C < 0$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \frac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$. Máme $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ a $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a tedy $I_1 = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, nulový bod je 0 a tedy $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$
3. stacionární řešení je $y_1 = 0$
4. $F(x) = \log(1+x^2)$, $I = I_1$; $\qquad G(y) = y^{\frac{1}{3}}$, $J = J_1, J_2$.
5. $I = I_1 = \mathbb{R}$, $J = J_2 = (0, \infty)$, $G(J) = (0, \infty)$,

   $$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = \{x \in \mathbb{R} : \log(1+x^2) + C \in (0,\infty)\}$$

   $$= \{x \in \mathbb{R} : \log(1+x^2) \in (-C, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 + x^2 \in (e^{-C}, \infty)\}$$

   $$= \begin{cases} (-\infty, -\sqrt{e^{-C} - 1}) \cup (\sqrt{e^{-C} - 1}, \infty), & C \leq 0 \\ (-\infty, \infty), & C > 0. \end{cases}$$

   $G^{-1}(t) = t^3$ a tedy dostáváme řešení

   $$y_3(x) = (\log(1+x^2) + C)^3, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{e^{-C} - 1}), \quad C \leq 0$$

   $$y_4(x) = (\log(1+x^2) + C)^3, \quad x \in (\sqrt{e^{-C} - 1}, \infty), \quad C \leq 0$$

   $$y_5(x) = (\log(1+x^2) + C)^3, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad C > 0$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$.

6. Máme řešení:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 0 \\
y_2(x) &= (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (-\sqrt{e^{-C}-1}, \sqrt{e^{-C}-1}), \quad C < 0 \\
y_3(x) &= (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{e^{-C}-1}), \quad C \leq 0 \\
y_4(x) &= (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (\sqrt{e^{-C}-1}, \infty), \quad C \leq 0 \\
y_5(x) &= (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad C > 0
\end{aligned}$$

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \dfrac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$.

6. Máme řešení:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= 0 \\
y_2(x) &= (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (-\sqrt{e^{-C}-1}, \sqrt{e^{-C}-1}), \quad C < 0 \\
y_3(x) &= (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{e^{-C}-1}), \quad C \leq 0 \\
y_4(x) &= (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (\sqrt{e^{-C}-1}, \infty), \quad C \leq 0 \\
y_5(x) &= (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad C > 0
\end{aligned}
$$

Řešení y_5 je určitě maximální a protože (pro $C \leq 0$)

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{e^{-C}-1}} (\log(1+x^2)+C)^3 = 0,$$

můžeme řešení y_2, y_3 a y_4 lepit v krajních bodech tvaru $\pm\sqrt{e^{-C}-1}$.

Jak na separované proměnné - příklady

Řešme rovnici $y' = \frac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1+x^2}$. Tvar obecného maximálního řešení bude buď

$$y_5(x) = (\log(1+x^2)+C)^3, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad C > 0,$$

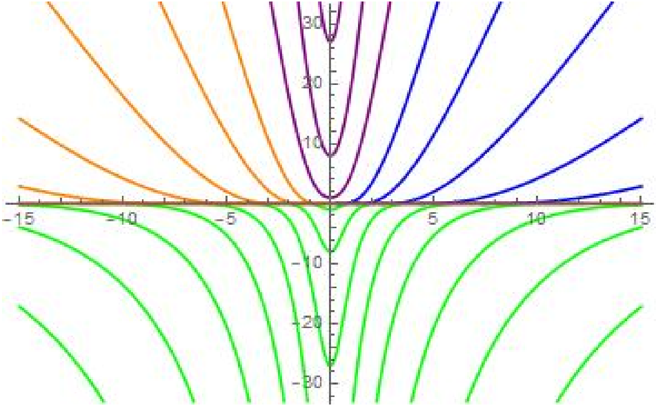
nebo

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} (\log(1+x^2)+C)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{e^{-C}-1}], \\ 0, & x \in (-\sqrt{e^{-C}-1}, -\sqrt{e^{-D}-1}], \\ (\log(1+x^2)+D)^3, & x \in (-\sqrt{e^{-D}-1}, \sqrt{e^{-D}-1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{e^{-D}-1}, \sqrt{e^{-E}-1}), \\ (\log(1+x^2)+E)^3, & x \in [\sqrt{e^{-E}-1}, \infty), \end{cases}$$

kde $C, E < D \leq 0$, $C, E \in [-\infty, 0]$.

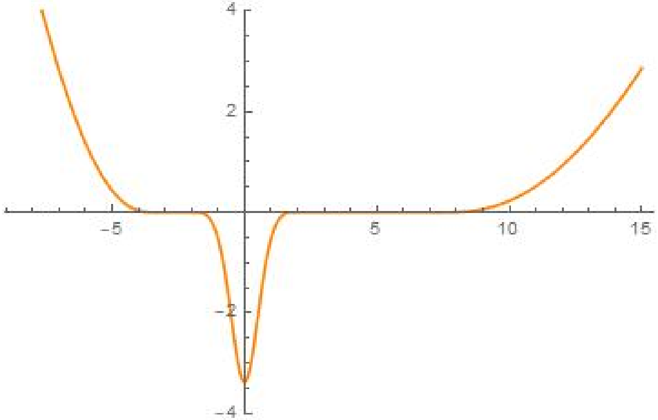
Jak na separované proměnné - příklady

Před lepením:



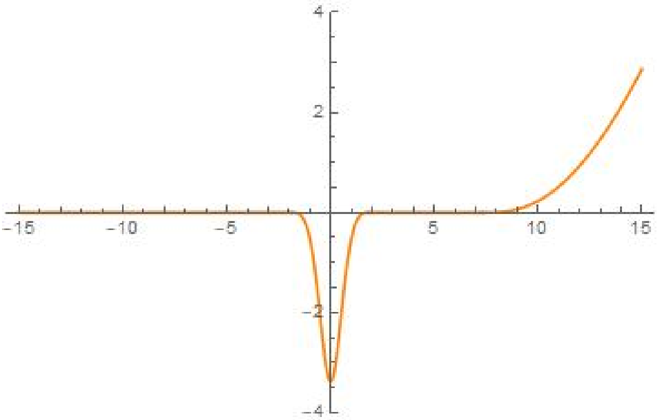
Jak na separované proměnné - příklady

Po lepení:



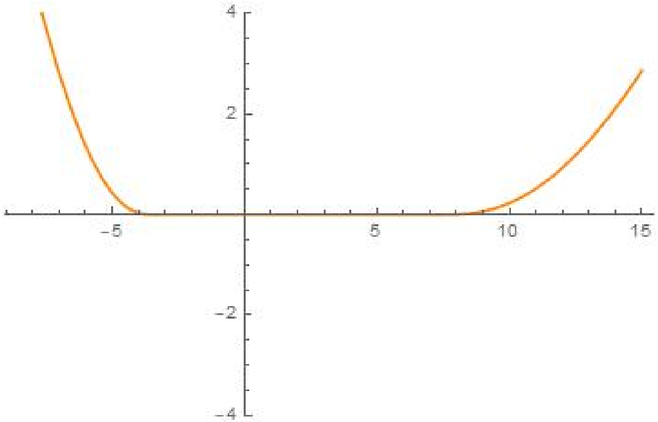
Jak na separované proměnné - příklady

Po lepení:



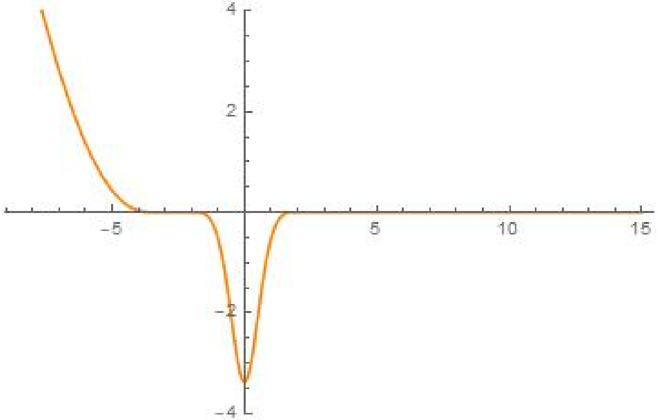
Jak na separované proměnné - příklady

Po lepení:



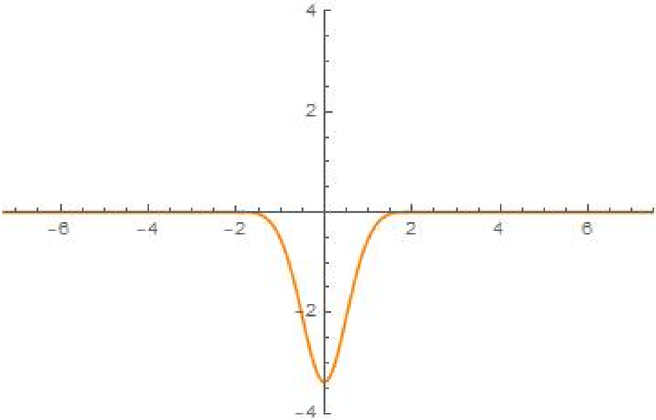
Jak na separované proměnné - příklady

Po lepení:

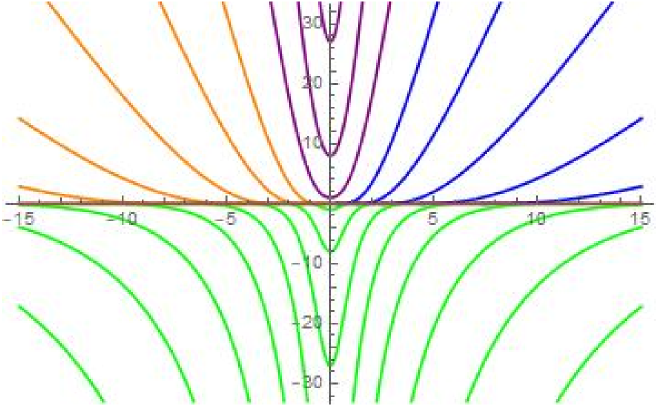


Jak na separované proměnné - příklady

Po lepení:



Jak na separované proměnné - příklady



Máme všechna řešení? Máme $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ a $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.